Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

PROBABILIDADES; NUMERACIÓN Y CONTEO DE NÚMEROS

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS

01. Tres personas A, B y C trabajan independientemente en decifrar un mensaje, con probabilidades de descifrarlo igual a $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas descifre el mensaje?

A) 3/5 B) 2/3 C) 1/2
D) 2/5 E) 8/15

Se sabe $P(M) = 1 - P(\overline{M})$

$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

* Si A; B y C son independientes
  → $\overline{A}$; $\overline{B}$ y $\overline{C}$ " "
* Si M y N son independientes
  $P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$

Resolución:

$P(A) = \frac{1}{5} \rightarrow P(\overline{A}) = \frac{4}{5}$

$P(B) = \frac{1}{4} \rightarrow P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$

$P(C) = \frac{1}{3} \rightarrow P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$

Piden $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

$= 1 - P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{C})$

$= 1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{5}$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{5}$

03. Se lanza una moneda 4 veces, cuál es la probabilidad de obtener en el 1er. lanzamiento cara, en el tercer lanzamiento sello y en el cuarto lanzamiento cara?

A) 1/8 B) 2/8 C) 3/8
D) 4/8 E) 5/8

Resolución:

E: Se lanza una moneda 4 veces

* Casos posibles

1ª	2ª	3ª	4ª
C	C	C	C
S	S	S	S

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 = \#cp$

* Casos favorables

1ª	2ª	3ª	4ª
C	C	S	C
	S		

$1 \times 2 \times 1 \times 1 = 2 = \#cf$

Piden $P = \frac{\#cf}{\#cp} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

05. Al lanzar cuatro veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salga en el segundo lanzamiento cara y en el cuarto lanzamiento sello?

A) 1/4 B) 3/16 C) 2/5
D) 1/8 E) 3/8

Resolución:

E: Se lanza una moneda 4 veces

* Casos posibles

1°	2°	3°	4°
C	C	C	C
S	S	S	S

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 = \#cp$

* Casos favorables

1°	2°	3°	4°
C	C	C	S
S		S	

$2 \times 1 \times 2 \times 1 = 4 = \#cf$

Piden $p = \frac{\#cf}{\#cp} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

07. Sea $K \in Z^+$, $K \geq 2$. ¿Cuántos números naturales cumplen que se escriben con 3 cifras en la base 3K y con 4 cifras en la base 2K a la vez?

A) $19K^3 - 3$ B) $19K^3 - 1$ C) $19K^3$
D) $19K^3 + 1$ E) $19K^3 + 4$

Propiedad de existencia

Si $N = \overline{abc}_{(7)} \rightarrow 7^2 \leq N < 7^3$

Si $N = \overline{abcd}_{(5)} \rightarrow 5^3 \leq N < 5^4$

$36 \leq N$

$64 \leq N$

Resolución:

$k \in Z^+$; $k \geq 2$

Sea N uno de los #s

$N = \overline{abc}_{(3k)} \rightarrow (3k)^2 \leq N < (3k)^3$

$N = \overline{xyzw}_{(2k)} \rightarrow (2k)^3 \leq N < (2k)^4$

Intersectando

$(2k)^3 \leq N < (3k)^3$

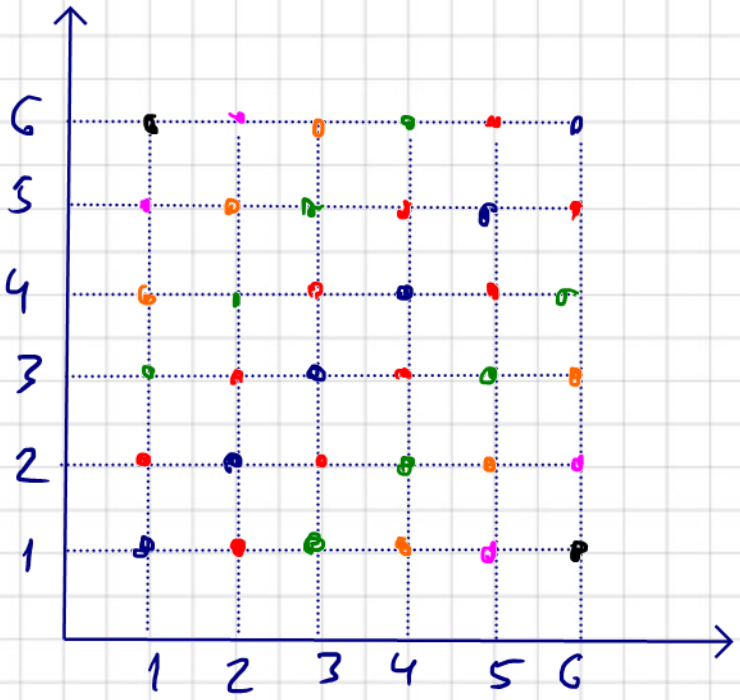
$8k^3 \leq N < 27k^3$

$N = \underbrace{8k^3, 8k^3+1, 8k^3+2, \ldots, 27k^3-1}$

N toma: $27k^3 - 1 - 8k^3 + 1 = 19k^3$ valores

09. Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados y sea la variable aleatoria X definida como la diferencia entre ambas puntuaciones. Hallar la esperanza matemática de dicha variable X.

A) 35/18 B) 71/36 C) 23/12
D) 2 E) 17/ 9



Resolución:

ε : Se lanzan dos dados

$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);\dots;(6;6)\} \rightarrow n(\Omega) = 36$

$X \Rightarrow \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad 0$

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$\rightarrow \sum P(x) = 1$

Piden $E(X) = \sum X_i \cdot P(X_i)$

$E(X) = 0 + \frac{10}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{16}{36} + \frac{10}{36}$

$E(X) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

11. Si: $\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)} = \overline{abcd}_{n-1}$

y $n > 4$.

Hallar: $a + b + c + d$.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

Obs $555_{(6)}$ a base 5

DP → B(10) → D.S

Resolución:

$\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)} = \overline{abcd}_{(n-1)}$; $n>4$

DP → B(10) → D.S

1°) $\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{n} = n^3 - 1$

2°) $n^3 + 0n^2 + 0.n - 1 \,\big|\, n-1$

$n^2 + 0n \quad n^2 + n + 1 \,\big|\, n-1$

$n - 1 \quad 2n + 1 \quad n + 2 \,\big|\, n-1$

$0 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

Luego $\overline{(n-1)(n-1)(n-1)}_{n} = 1330_{(n-1)}$

Comparando $a=1$; $b=3$; $c=3$; $d=0$

$\therefore a+b+c+d = 7$

13. Si $\overline{\left(\frac{9}{k}\right)\left(\frac{6}{k}\right)\left(\frac{15}{k}\right)}_{(2k+1)} = \overline{24(k+3)}_{(n)}$

calcular (n - k)

A) 6 B) 5 C) 4

D) 2 E) 3

Resolución:

$\overline{\left(\frac{9}{k}\right)\left(\frac{6}{k}\right)\left(\frac{15}{k}\right)}_{(2k+1)} = \overline{24(k+3)}_{(n)}$

Obs $k=3 \rightarrow 325_{(7)} = 246_{(n)}$

D.P.

$3.7^2+2.7+5 = 2n^2+4n+6$

$160 = 2n^2+4n \rightarrow 80 = n^2+2n$

Obs $n=8$

$\therefore n-k = 8-3 = 5$

15. Se tiene la sucesión: 13, 17; 23; 31, ..; y la P.A. $\overline{ab}_{(7)}$; $36_{(7)}$; $\overline{(a+2)b}_{(7)}$; ... . Calcular la suma de los términos de la P.A. que sean menores o iguales al décimo quinto término de la primera sucesión.

A) 3276 B) 4655 C) 4607

D) 4606 E) 4802

$\overline{(a+2)b}_7 -$

$\overline{ab}_7$

$20_{(7)}$

$\overline{ab}_7 +$ $\rightarrow b=6$

10_7 $a=2$

$36_{(7)}$

$S_n = 20\frac{n}{1!} + 7\frac{n(n-1)}{2!}$

Para $n=34 \rightarrow S_{24} = \frac{20(34)}{1} + \frac{7(34)(33)}{2}$

$\therefore S = 4607$

Resolución:

* 13; 17; 23; 31; ----

4 6 8

2 2

Obs $a_n = 13 + 4\frac{(n-1)}{1!} + 2\frac{(n-1)(n-2)}{2!}$

$a_{15} = 13 + 4(14) + \frac{2(14)(13)}{2} = 251$

* PA: $\overline{ab}_7$; 36_7; $\overline{(a+2)b}_7$; ---- $\Rightarrow b=6; a=2$

$10_{(7)}$ $10_{(7)}$

PA: 26_7; 36_7; 46_7; ---

PA: 20; 27; 34; ---

7 7

Obs $a_n = 7n+13 \rightarrow 7n+13 \leq 251 \rightarrow n \leq 34$

Sea $S = 20 + 27 + 34 + ---$

7 7

17. ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse en base 8 de tal manera que el producto de las 2 primeras cifras sea 18, y la suma de las últimas sea impar?

A) 594 B)786 C) 512

D) 256 E) 520

2

$a \cdot b = 18 = \begin{cases} 3 \times 6 \\ 6 \times 3 \end{cases}$

Si $a = 3 \rightarrow b = 6$

Si $a = 6 \rightarrow b = 3$

2×9

Resolución:

Sea el #:

$\underline{abcde}_{(8)} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = 18 \rightarrow b = \frac{18}{a} \\ d + e = \text{impar} \end{cases}$

P I

I P

1° Forma

			P	I	
a	b	c	d	e	(8)
3		0	0	1	
6		1	2	3	
		2	4	5	
		⋮	6	7	
		7			

$2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ #

2ª Forma

			I	P	
a	b	c	d	e	(8)
3		0	1	0	
6		1	3	2	
		2	5	4	
		⋮	7	6	
		7			

$2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ #s

∴ total: $256 + 256 = 512$ #s

19. De un libro se arrancan todas las páginas terminadas en cifras 7, observandose que se eliminan 230 cifras de la numeración del libro en total. ¿Cuál es el número máximo de páginas que puede tener el libro? dar la suma de cifras de este número.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

$$230 - 38 = 192 \text{ cf}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Resolución:

Páginas arrancadas

a_1 a_{32}

7; 17; 27; ...; 97; 107; 117; ... 417
8; 18; 28; ...; 98; 108; 118; ... 418

2 cfs 36 cfs 192 cfs

230 cfs

Obs $\frac{192}{6} = 32$

$a_{32} = 107 + 31(10) \Rightarrow a_{32} = 417$

Obs El libro no tiene la página 427

$\therefore$ El # máximo de páginas = 426

Σ cfs = 12

21. Si: $N = 1\,000_{(a)} = 10\,000_{(b)}$ y $N < 10^{24}$
¿Cuántos valores puede tomar N?

A) 98 B) 100 C) 101
D) 102 E) 103

$MCM(3;4) = 12$

Resolución:

$N = 1000_a = 10000_b$; $N < 10^{24}$

$N = a^3 = b^4 \rightarrow N = k^{12}$

Reemp $k^{12} < 10^{24} \rightarrow k < 10^2$

$k < 100$

$k = 2; 3; 4; ---; 99 \rightarrow$ 98 valores

∴ Rpta: 98

23. ¿Cuántas cifras tiene $3^{37} + 1$ en el sistema de base 27?

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

Resolución:

Sea $N = 3^{37} + 1$

Como $27 = 3^3$

$N = (3^3)^{12} \cdot 3^1 + 1 = 3 \cdot 27^{12} + 1$

$N = 3\underbrace{00\ldots000}_{12\text{ cfs}}{}_{(27)} + 1$

$N = 3\underbrace{00\ldots001}_{12\text{ cfs}}{}_{(27)}$

$\therefore$ N tiene 13 cfs en base 27

25. Si se cumple que $\overline{55a}_{\overline{b2}} = \overline{cd9}$

Calcule a + b + c + d

A) 21 B) 23 C) 25

D) 27 E) 29

$\overline{b2} = 12$

22 ✗

32 ✗

Resolución:

$\overline{55a}_{\overline{b2}} = \overline{cd9}$

Obs $\overline{b2} = 12 \rightarrow b = 1$

$\overline{55a}_{12} = \overline{cd9}$

$5 \cdot 12^2 + 5 \cdot 12 + a = \overline{cd9} \rightarrow 780 + a = \overline{cd9}$

Obs $a = 9 \rightarrow 789 = \overline{cd9} \rightarrow c = 7;\ d = 8$

$\therefore\ a + b + c + d = 25$

9 1 7 8

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS

02. Un experimento aleatorio consiste en extraer una muestra en "n" focos uno a uno, sin reposición, de una caja que contiene 40 focos. Si el 5% de estos focos son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 2 focos, los dos sean defectuosos?.

A) $\frac{1}{570}$ B) $\frac{1}{780}$ C) $\frac{1}{840}$

D) $\frac{1}{960}$ E) $\frac{1}{1560}$

$5\% \cdot 40 = 2 \rightarrow$ defect

1D
38B

Resolución:

Se extrae 2 focos (uno por uno sin reposición)

2D
38B

Sea M: El 1° sea defectuoso

N: El 2° sea defectuoso

Piden

$P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N/M)$

$= \frac{2}{40} \cdot \frac{1}{39} = \frac{1}{780}$

04. Hallar la esperanza matemática de la variable aleatoria X cuya distribución de probabilidad está dado por :

x	0	1	2	3	4
P(x)	12k	0,025	0,5	0,075	4k

A) 1,65 B) 1,70 C) 1,71
D) 1,75 E) 1,78

Resolución:

Se cumple $\sum P(x_i) = 1$

$12k + 0{,}025 + 0{,}5 + 0{,}075 + 4k = 1$

$16k = 0{,}4 \rightarrow k = 0{,}025$

Piden

$E(x) = \sum x_i P(x_i)$

$= 0 + 0{,}025 + 1 + 0{,}225 + 0{,}4$

$E(x) = 1{,}65$

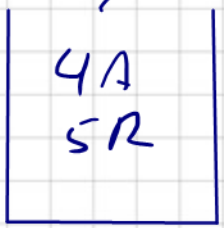
06. Una caja contiene 4 esferas azules y 5 esferas rojas, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer 5 esferas, dos sean azules y 3 sean rojas?

A) 10/21 B) 11/21 C) 13/21
D) 9/21 E) 8/21

$$C_5^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

Resolución:

Se extraen 5 esferas



Sea M: 2 sean Azules y 3 sean rojas

Piden

$$P(M) = \frac{\#cf}{\#cp} = \frac{C_2^4 \, C_3^5}{C_5^9} = \frac{6 \cdot 10}{126} = \frac{60}{126}$$

$$\therefore P(M) = \frac{10}{21}$$

08. Consideremos el experimento aleatorio de seleccionar un número del conjunto {1; 2; 3; 4; 5} y la variable X definida como el número que representa la cantidad de números naturales que dividen exactamente al número seleccionado. Hallar el valor esperado de X.

A) 2 B) 8/5 C) 3

D) 12/5 E) 5

$X = CD(\#)$

$Div(1): 1 \rightarrow X = 1$

$Div(2): 1; 2 \rightarrow X = 2$

$Div(3): 1; 3 \rightarrow X = 2$

$Div(4): 1; 2; 4 \rightarrow X = 3$

$Div(5): 1; 5 \rightarrow X = 2$

Resolución:

Sea $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$X \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 2$

X	1	2	3
$P(X)$	$1/5$	$3/5$	$1/5$

Piden $E(X) = \sum X_i P(X_i)$

$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{10}{5}$

$\therefore E(X) = 2$

10. Si el número 55 ... $5_{(6)}$ de 80 cifras se escribe en base "n" como el mayor número de 40 cifras que se puede formar en dicho sistema. ¿Cuál es la base del sistema de numeración en que se cumple la condición.

A) 30 B) 32 C) 34
D) 36 E) 38

Resolución:

Por dato

$$\underbrace{55\ldots5}_{80\text{ cifras}}{}_{(6)} = \overline{\underbrace{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{40\text{ cifras}}}_{(n)}$$

$$6^{80}-1 = n^{40}-1 \rightarrow 6^{80} = n^{40}$$

$$6^{2} = n$$

$$\therefore n = 36$$

12. ¿Cuántos números de la forma

$$\overline{(a+2)\left(\frac{c}{3}\right)(a-3)\left(\frac{b-3}{2}\right)(c-2)},$$

existen?

A) 48 B) 618 C) 150

D) 9×10^4 E) 384

Resolución:

$$\overline{(a+2)\left(\frac{c}{3}\right)(a-3)\left(\frac{b-3}{2}\right)(c-2)}$$

1			1
3		0	3
4		1	6
5		2	9
6		⋮	
7		9	
5	×	10 ×	3 = 150

$$\frac{b-3}{2} = 0;\ 1;\ \ldots;\ 9$$

14. Sea:

$$A = \left\{ \overline{abcde}_{(4)} / \overline{abcde}_{(4)} = \overline{pqrst}_{(7)} \text{ donde } a \neq 0 \text{ y } p \neq 0 \right\}$$

Hallar card(A):

A) 0 B) 3 C) 5

D) 9 E) 12

Resolución:

Sea x un elemento de A

$x = \overline{abcde}_{(4)} \rightarrow 4^4 \leq x < 4^5$

$x = \overline{pqrst}_{(7)} \rightarrow 7^4 \leq x < 7^5$

Intersectando

$7^4 \leq x < 4^5$

$2401 \leq x < 1024$

Obs $x \nexists \rightarrow A$ es vacío $\Rightarrow A = \{\ \}$

$\therefore n(A) = 0$

16. El mayor número de tres cifras del sistema de base (n+1) del menor "n" posible se escribe como $\overline{abn}$ en base 7. La suma de las cifras de dicho número expresado en base 10 es :

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

n^2+3n+2

$n \quad 1$

$n \quad 2$

$30 \,/\, 7$

$2 \quad 4$

Resolución:

Dato $\overline{nnn}_{(n+1)} = \overline{a5n}_{(7)}$; n es min

$(n+1)^3-1 = \overline{a5}_{(7)} \cdot 7 + n$

$n^3+3n^2+3n = \overline{a5}_{(7)} \cdot 7 + n$

$n^3+3n^2+2n = \overline{a5}_{(7)} \cdot 7$

$n(n+1)(n+2) = \overline{a5}_{(7)} \cdot 7$

Para $n+2=7 \rightarrow n=5$

$5 \cdot 6 \cdot \cancel{7} = \overline{a5}_{(7)} \cdot \cancel{7} \rightarrow \overline{a5}_{(7)} = 30$

$\overline{a5}_{(7)} = 42_{(7)} \rightarrow a=4;\ 5=2$

Luego $555_6 = 6^3-1 = 215 \rightarrow \Sigma cfs = 8$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS